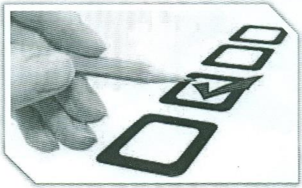
مجموعه نکات و فرمولهای
خلاصه شده‌ی
حرکت شناسی



مدارس :

هدایت ، سلام ، پیک نخبگان ، بهاردانش ، الزهراء ، توحید ، مصاحب

تهیه و تنظیم : مهندس واحدی

سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴

انواع معادلات در فیزیک:

۱) معادله مکان - زمان: $x = t^{۳} + ۴t^{۲} + ۲t$

۲) معادله سرعت - زمان: $v = ۳t^{۲} + ۸t + ۲$

۳) معادله شتاب - زمان: $a = ۶t + ۸$

توجه: هرگاه بخواهیم از x به v و یا از v به a برسیم مشتق می گیریم مانند

$x \xrightarrow{مشتق} v \xrightarrow{مشتق} a$

$x = ۴t^{۲} + ۳t + ۲$ و $v = ۲t^{۲} + ٤t$

$v = ۸t + ۳$		$a = ٤t + ۴$

توجه: هرگاه بخواهیم از v به x و یا از a به v و یا از a به x برسیم انتگرال می گیریم قاعده آن به صورت زیر است.

$\int v = t^{n} \Rightarrow x = \frac{1}{n+1}t^{n+1} + c$

$\int a = ۵ \Longrightarrow v = ۵t + c$

مثال:

$\int v = t^{۲} + ۲t + ۴$

$x = \frac{۱}{۲+۱}t^{۲+۱} + ۲ \times \frac{۱}{۱+۱}t^{۲} + ۴t + c$

$x = \frac{۱}{۳}t^{۳} + t^{۲} + ۴t + c$

جابجایی یا تغییر مکان

Δx: روی خط راست

Δr: در صفحه (دو بعد)

خط راستی است که نقطه شروع را به نقطه پایان وصل می کند و کمیتی برداری بوده و می تواند مثبت یا منفی یا صفر شود و از روابط زیر بدست می آید.

۱) هرگاه معادله مکان - زمان را بدهند با جایگذاری به جای t در معادله، $x_۱$ و $x_۲$ بدست آمده و از هم کم می کنیم.

$x = t^{۲} - ۴t + ۲$

$t_۱ = ۰ \longrightarrow x_۱ = ۲$	$\Delta x = x_۲ - x_۱$

$t_۲ = ۱ \longrightarrow x_۲ = -۱$	$\Delta x = -۱ - ۲ = -۳m$

② هرگاه معادله سرعت - زمان را بدهند

ابتدا انتگرال می گیریم و به معادله x-t می رسیم و با جایگذاری t، Δx را بدست می آوریم.

③ هرگاه معادله شتاب - زمان را بدهند

با دوبار انتگرال گرفتن به معادله x-t رسیده و با جایگذاری t، مقدار Δx را بدست می آوریم.

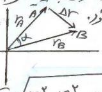
④ هرگاه ذره از نقطه $A\left|\begin{matrix}x_۱\\y_۱\end{matrix}\right.$ به نقطه $B\left|\begin{matrix}x_۲\\y_۲\end{matrix}\right.$ برود جابجایی به صورت زیر است.

$$\Delta r = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^{۲} + (y_۲ - y_۱)^{۲}}$$

⑤ هرگاه ذره روی دایره حرکت کند جابجایی به صورت زیر است

$$\Delta r = ۲R \sin\frac{\alpha}{۲}$$

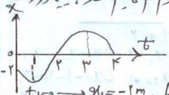
۶) هرگاه ذره مطابق شکل از نقطه A به نقطه B برود می توان جابجایی را به صورت زیر حساب نمود.



$$\Delta r = \sqrt{r_A^{۲} + r_B^{۲} - ۲r_Ar_B\cos\alpha}$$

۷) هرگاه نمودار x-t را داده باشند از روی نمودار در لحظات $t_۱$ و $t_۲$، x مربوطه

را بدست آورده و لازم کم نکنیم باشد جابجایی در مدت ۴s اول



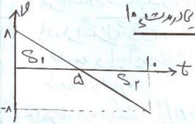
$t_1=۰ \longrightarrow x_1=-۲m \Longrightarrow \Delta x = x_2 - x_1$

$t_2=۴ \longrightarrow x_2=۰ \qquad \Delta x = ۰-(-۲)=۲$

۸) هرگاه نمودار سرعت - زمان را بدهند

مساحت زیر نمودار نشان دهنده جابجایی است.

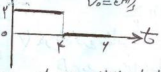
مثلا جابجایی در مدت ۱۰s



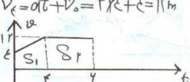
$$\Delta x = S_1+S_2 = \frac{۸\times۵}{۲} + \frac{۵\times(-۸)}{۲} = ۰$$

۹) هرگاه نمودار شتاب - زمان را بدهند ابتدا نمودار v-t آن را رسم نموده و از طریق مساحت زیر نمودار جابجایی بدست می آید

$v_0=۴m/s$



$v_۴=at+v_0=۲\times۴+۴=۱۲m$



$$\Delta x = S_1+S_2 = \frac{۴+۱۲}{۲}\times۴ + ۲\times۱۲$$

$$\Delta x = ۳۲+۲۴ = ۵۶\,m$$

توجه: منظور از ثانیه n ام مانند ثانیه سوم

$t_1=۲$ و $t_2=۳$

توجه: منظور از t ثانیه n ام حرکت:

مثلا: ۲ ثانیه سوم

$$\begin{cases} t_2=۳\times۲=۶ \\ t_1=۶-۲=۴ \end{cases}$$

ثانیه اول

$$\begin{cases} t_2=۳\times۱=۳ \\ t_1=۳-۳=۰ \end{cases}$$

نکته: منظور از مکان اولیه، یعنی مکان در لحظه $t=۰$ یعنی در معادله x-t به جای t عدد صفر را قرار بده

مثلا مکان اولیه $x=t^2+۵t+۲$ ی برابر

$t=۰ \longrightarrow x_0=۲$

نکته: شرط عبور متحرک از مبدأ:

در معادله x-t به جای x عدد صفر را قرار می دهیم.

مثلا $x=t^2-۵t+۴$ به جای $x=۰$ داده تا لحظه های عبور از مبدأ بدست آید

$t^2-۵t+۴=۰ \Longrightarrow (t-۱)(t-۴)$

$t=۱$ و $\boxed{t=۴}$

نکته: شرط عبور متحرک از مکان اولیه

در معادله x-t به جای x عدد x_0 (مکان اولیه) را قرار می دهیم مثلا $x=t^2-۴t+۶$ با لحظه های عبور از مکان اولیه عبارت از

$t^2-۴t+۶=۶ \longrightarrow t^2-۴t=۰$

$t(t-۴)=۰ \longrightarrow t=۰ \;,\; t=۴$

نکته: فاصله متحرک از مبدأ حرکت یعنی جابجایی در آن لحظه می باشد.

مثلاً $x=t^2+4t+3$ فاصله متحرک از مبدأ حرکت در لحظه $t=2$

$t=2 \longrightarrow x=4+8+3=15$

$\Delta x=15-3=12\,m$

سرعت متوسط $\bar{v}$

نسبت جابجایی متحرک در واحد زمان است و کمیت برداری، یکای آن $\frac{m}{s}$ و جهت بردار سرعت در جهت بردار جابجایی است.

نکته: رابطه تبدیل $\frac{km}{h}$ به واحد $\frac{m}{s}$

$$\frac{km}{h}\ \underset{\div\frac{10}{36}}{\overset{\times\frac{10}{36}}{\rightleftarrows}}\ \frac{m}{s}$$

روابط مربوط به محاسبه سرعت متوسط

حالت اول: ابتدا از روابط مربوط به جابجایی که در صفحه ۱ و ۲ و ۳ گفته شد استفاده کرده و سپس رابطه زیر را می نویسیم

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$\Delta x \longrightarrow$ جابجایی

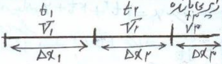
$\Delta t \longrightarrow$ مدت زمان

$$\bar{v}=\frac{\Delta r}{\Delta t}$$

$\Delta r \longrightarrow$ جابجایی

$\Delta t \longrightarrow$ مدت زمان

حالت دوم: هرگاه یک متحرک روی خط راست جابجایی Δx_1 را با سرعت v_1 در مدت t_1 و جابجایی Δx_2 را در مدت t_2 با سرعت v_2 ... طی کند سرعت متوسط به صورت



۱	مکان - زمان	$\bar{v}=\frac{\Delta x_1+\Delta x_2+\cdots}{t_1+t_2}$
۲	سرعت و زمان	$\bar{v}=\frac{v_1t_1\pm v_2t_2+\cdots}{t_1+t_2+\cdots}$
۳	مکان و سرعت	$\bar{v}=\frac{\Delta x_1+\Delta x_2+\cdots}{\frac{\Delta x_1}{v_1}+\frac{\Delta x_2}{v_2}}$

در رابطه (۲) علامت منفی برای هنگامی است که متحرک در خلاف جهت محور x ها بود.

نکته خاص: هرگاه طول مسیر حرکت n باشد و $\frac{m}{n}$ مسیر را با سرعت v_1 و بقیه را با سرعت v_2 برود سرعت متوسط به صورت زیر است

$$\boxed{\bar{v}=\frac{nv_1v_2}{(n-m)v_1+mv_2}}$$

$\frac{2}{5}$ طول مسیر

$n=5,\ m=2$

توجه: هرگاه در رابطه بالا نصف مسیر را با سرعت v_1 و بقیه را با سرعت v_2 برود سرعت متوسط به صورت زیر است.

$$\boxed{\bar{v}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}}$$

سرعت لحظه ای (v)

مشتق معادله x نسبت به زمان است.

$$\boxed{v=\frac{dx}{dt}}$$

نکته: منظور از سرعت اولیه یعنی در معادله $v-t$ به جای t عدد صفر قرار بده

مثلا در معادله $x = 2t^2 + 4t + 6$ سرعت اولیه می شود

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v = 4t + 4 \xrightarrow{t=0} v = 4\,\frac{m}{s}$$

نکته (۲) شرط توقف این است که در معادله $v-t$ به جای v عدد صفر قرار دهیم

مثلا $v = t^2 - 3t - 4$

لحظه توقف

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$(t+1)(t-4) = 0 \begin{cases} t = -1 & \text{غق} \\ t = 4 & \text{قق} \end{cases}$$

نکته (۳): شرط تغییر جهت این است که در معادله $v-t$ به جای v عدد صفر را قرار داده و توان زوج نباشد

مثال (۱)

$$v = t^2 - 5t + 4$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-4) = 0$$

$$t = 1 , t = 4$$

$$v = t^2 - 4t + 4$$

$$t^2 - 4t + 4 = 0 \Rightarrow (t-2)^2 = 0$$

چون توان زوج است متحرک هیچگاه تغییر جهت نمی دهد.

نکته (۴) هرگاه گفته شود متحرک ساکن شده فاصله را از مبدا دارد

$$v = 0$$

نکته (۵) شرط اینکه متحرک به مبدا نزدیک شود

$$x \times v < 0$$

و شرط اینکه متحرک از مبدا دور شود

$$x \times v > 0$$

مثلا در معادله $x = t^2 - 4t$ در بازه زمانی ۰ تا ۵s می توان ① نوشت

$$t^2 - 4t - 5 = 0 \longrightarrow (t+1)(t-5) = 0$$

$t + 1 = 0 \longrightarrow t = -1$ غق

$t - 5 = 0 \quad t = 5$ قق

$$v = \frac{dx}{dt} = 2t - 4 = 0 \longrightarrow t = 2s$$

		2		5	
x	−		−		+
v	−	0	+		+
$x \times v$	+		−		
	در حال دور شدن		در حال نزدیک شدن		

نکته (۶): شرط اینکه بردار مکان تغییر جهت دهد $x = 0$ قرار داده و زوج نباشد

$$x = t^2 - 5t + 6 \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0$$

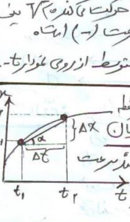
$$(t-3)(t-2) = 0 \begin{cases} t = 2 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$x = t^2 - 6t + 9 \longrightarrow t^2 - 6t + 9 = 0$$

$(t-3)^2$ → تغییر جهت نمی دهد

نکته (۷) هنگامی که گفته می شود متحرک در جهت محور x حرکت می کند یعنی $v > 0$ (علامت سرعت +) و هنگامی که گفته می شود متحرک در خلاف جهت محور x ها حرکت می کند $v < 0$ یعنی علامت سرعت (−) است.

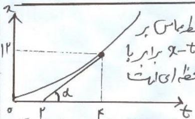
مفهوم سرعت متوسط از روی نمودار $x-t$



شیب خطی که دو نقطه از نمودار مکان - زمان را بهم وصل می کند سرعت متوسط می باشد

$$\tan\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \bar{v}$$

مفهوم سرعت لحظه‌ای از روی نمودار x−t

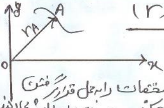


شیب خط مماس بر نمودار x−t برابر با سرعت لحظه‌ای است

و هر چه مقدار شیب بیشتر باشد سرعت لحظه‌ای بیشتر است

$\boxed{\tan\alpha = V}$, $\tan\alpha = \frac{12}{2} = 6$

بردار مکان (r)



برداری که مبدأ مختصات را به محل قرار گرفتن جسم وصل می‌کند و به صورت زیر نمایش می‌دهند

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

نکته (۱): بزرگی بردار $\vec{A}$ $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j}$

$$\boxed{A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}}$$

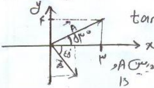
نکته (۲): زاویه بردار A با محور x ها:

$$\boxed{\tan\theta = \left|\frac{A_y}{A_x}\right|}$$

زاویه بین دو بردار:

$\vec{A} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

$\vec{B} = \vec{i} - \vec{j}$



$\tan\theta_A = \frac{4}{3} = 53^\circ$

$\tan\theta_B = \left|\frac{1}{-1}\right| = 45^\circ$

زاویه بین A و B = ۵۳° + ۴۵ = ۹۸°

بردار جابجایی یا تغییر مکان در دو بعد:

$$\boxed{\Delta r = (\Delta r)\vec{i} + \Delta r\vec{j}}$$

سرعت متوسط در دو بعد $\bar{V}$

$$\boxed{\bar{V} = \frac{\Delta r}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta r}{\Delta t}\vec{j}}$$

سرعت لحظه‌ای در دو بعد $\vec{V}$

$$\boxed{\vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}}$$

نکته: شرط موازی بودن دو بردار:

$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j}$

$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j}$

$$\boxed{\frac{A_y}{A_x} = \frac{B_y}{B_x}}$$

نکته: شرط عمود بودن دو بردار:

$$\boxed{\frac{A_y}{A_x} = -\frac{B_x}{B_y}}$$

توجه (۱): هر گاه یک بردار موازی با محور x باشد مؤلفه y برابر با صفر است.

توجه (۲) هر گاه یک بردار موازی با محور y ها باشد مؤلفه x برابر با صفر است

توجه (۳): هر گاه یک بردار محور x ها را قطع کند مؤلفه y = ۰ است

توجه (۴) هر گاه یک بردار منطبق بر محور x ها باشد y = ۰ است

روابط مربوط به مسافت طی شده (d)

۱) مسافت برابر با مجموع طول های طی شده است و کمیتی نرده ای است و همواره مثبت است

۲) هرگاه مسافت طی شده روی دایره را بخواهیم

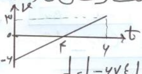
$d = ۲\pi R \longrightarrow$ در یک دور کامل

شعاع دایره

هرگاه مثلا ۶۰ درجه روی دایره حرکت کند مسافت طی شده به صورت زیر است

$d = \frac{۲\pi R}{۶}$

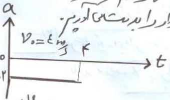
۳) هرگاه نمودار $v-t$ را بدهند قدر مطلق مساحت زیر نمودار مسافت را نشان می دهد

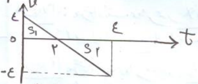


$d = |S_1| + |S_2|$

$d = |-\frac{۶\times ٤}{۲}| + |\frac{۲\times ۳}{۲}| = ۱۵m$

۴) هرگاه نمودار $a-t$ را بدهند ابتدا نمودار $v-t$ را رسم کرده و قدر مطلق مساحت زیر نمودار را بدست می آوریم.





$d = |S_1| + |S_2|$

$d = |\frac{٤\times ۲}{۲}| + |-\frac{٤\times ٤}{۲}| = ۱۲m$

۵) معادله $x-t$ را بدهند و دو لحظه t_1 و t_2 را بدهند

ابتدا با مشتق گیری از معادله $x-t$ به $v-t$ رسیده و آن را مساوی صفر قرار داده و t_s را بدست می آوریم اگر t_s بین دو لحظه t_1 و t_2 نبود، آنگاه

$d = |\Delta x|$

جابجایی

مثال: جابجایی در ۲s اول

$x = t^{۲} - ۸t + ۴$

$v = \frac{dx}{dt} = ۲t - ۸ = ۰ \Longrightarrow t_s = ۴$

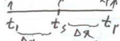
چون t_s بین $t_1 = ۰$ و $t_2 = ۲$ نمی باشد پس Δx را در ۰ تا ۲ بدست می آوریم که با d برابر است

$t_1 = ۰ \longrightarrow x_1 = ۴$

$t_2 = ۲ \longrightarrow x_2 = ۴ - ۸\times ۲ + ۴ = -۸$

$d = |\Delta x| = |x_2 - x_1| = |-۸ - ۴| = +۱۲ m$

اگر t_s بین دو لحظه t_1 و t_2 باشد به صورت زیر عمل می کنیم



$d = |\Delta x_1| + |\Delta x_2|$

مثال: $x = t^{۲} - ۴t + ۶$ باشد مسافت طی شده در ۴s اول

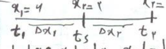
$v = \frac{dx}{dt} = ۲t - ۴ = ۰ \quad t_s = ۲s$

t_s بین دو لحظه t_1 و t_2 است پس مکان ذره را در هر لحظات t_1، t_s و t_2 بدست می آوریم

$t_1 = ۰ \xrightarrow[x]{\text{در معادله}} x_1 = +۶$

$t_s = ۲ \longrightarrow x_s = ۲^{۲} - ٤\times ۲ + ۶ = ۲m$

$t_2 = ۴ \longrightarrow x_2 = ۴^{۲} - ۴\times ٤ + ۶ = ۶m$



$d = |x_s - x_1| + |x_2 - x_s| = |۲ - ۶| + |۶ - ۲|$

$d = ۸$

شتاب متوسط $\bar{a}$

نسبت تغییرات سرعت در واحد زمان است و یکای آن $\frac{m}{s^2}$ و جهت بردار شتاب متوسط در جهت تغییرات سرعت (ΔV) است.

$$\boxed{\bar{a}=\frac{\Delta V}{\Delta t}}$$

$\Delta V \rightarrow$ تغییرات سرعت

$\Delta t \rightarrow$ مدت زمان

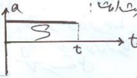
نکته (۱): برای بدست آوردن ΔV از روابط زیر استفاده می‌شود (تفاضل دو بردار)

دو بردار هم جهت	$\Delta V=V_2-V_1$
دو بردار خلاف جهت	$\Delta V=V_2+V_1$
دو بردار عمود	$\Delta V=\sqrt{V_1^2+V_2^2}$
دو بردار زاویه‌دار باشند	$\Delta V=\sqrt{V_1^2+V_1^2-2V_1V_1\cos\alpha}$
دو بردار مساوی	$\Delta V=2V\sin\frac{\alpha}{2}$

نکته مهم: شرط ایجاد شتاب ۲ مورد است
۱) تغییر در اندازه سرعت
۲) تغییر در جهت سرعت

نکته: هرگاه مسیر حرکت دایره باشد و سرعت ثابت باشد باز هم شتاب داریم چون جهت بردار سرعت عوض می‌شود و مقدار Δ از روابط بالا

نکته مهم: مساحت زیر نمودار $a-t$ بیانگر ΔV تغییرات سرعت است:



$$\underset{a-t}{S}=\Delta V$$

شتاب متوسط در دو بعد

$$\boxed{\bar{a}=\frac{\Delta V}{\Delta t}\vec{i}+\frac{\Delta V}{\Delta t}\vec{j}}$$

شتاب لحظه‌ای (a)

مشتق بردار سرعت در واحد زمان است و از روابط زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{a=\frac{dV}{dt}} \quad \boxed{a=\frac{d^2x}{dt^2}}$$

نکته مهم: هرگاه گفته شود سرعت به کمترین مقدار برسد $a=0$

نکته مهم: شرط افزایش سرعت $a>0$

نکته مهم: شرط کاهش سرعت $a<0$

شتاب لحظه‌ای در دو بعد

$$\boxed{a=\frac{dV}{dt}\vec{i}+\frac{dV}{dt}\vec{j}}$$

نکته مهم: شرط اینکه حرکت شتابدار تند شونده

$$\boxed{a\times V>0}$$

نکته مهم: شرط اینکه حرکت شتابدار کند شونده

$$\boxed{a\times V<0}$$

نکته مهم: هرگاه زاویه بین سرعت و شتاب صفر یا ۱۸۰ باشد متحرک روی خط راست حرکت می‌کند (شیب آنها مساوی)

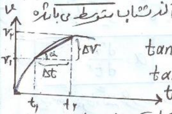
نکته: هرگاه زاویه بین سرعت و شتاب کمتر از ۹۰ باشد حرکت شتابدار تند شونده و هرگاه زاویه بین سرعت و شتاب بزرگتر از ۹۰ درجه باشد حرکت شتابدار کند شونده می‌باشد.

شرط رسیدن دو متحرک در صفحه:

$x_1 = x_2$

$y_1 = y_2$

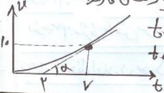
نکته: شیب خطی که دو نقطه از نمودار $v-t$ را به هم وصل می کند شتاب متوسط می باشد



$\tan\alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

$\tan\alpha = \bar{a}$

نکته: شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ شتاب لحظه ای را نشان می دهد



$\tan\alpha = a$

$\tan\alpha = \frac{10}{5}$

$\tan\alpha = 2$

* نکته مهم: هرگاه معادله v را بر حسب x بدهند و شتاب را بخواهند به صورت زیر عمل می کنیم

$v = 4x - 1$ $\quad x = 1$

از دو طرف نسبت به t مشتق می گیریم

$\frac{dv}{dt} = 4 \times \frac{dx}{dt} \Rightarrow a = 4 \times v$

$a = 4 \times (4x - 1) =$

$a = 4 \times (4 \times 1 - 1) = 12 \frac{m}{s^2}$

$v = 5x^2 - 1$ $\quad$ مثال ② $x = 2$

$\frac{dv}{dt} = 5 \times 2x \frac{dx}{dt} \Rightarrow a = 10x \times v$

$a = 10 \times 2 \times (5x^2 - 1)$

$a = 20(5 \times 4 - 1) = 380$

* نحوه نوشتن معادله مسیر حرکت:

معادله مسیر حرکت یک رابطه ریاضی بین x و y است که t (زمان) وجود ندارد پس t^2 را از معادله x بدست آورده و در y می گذاریم:

$\vec{r} = 5t^2\vec{i} + (4t^2 - 1)\vec{j}$

$x = 5t^2 \longrightarrow t^2 = \frac{x}{5}$

$y = 4t^2 - 1 \longrightarrow y = 4 \times \frac{x}{5} - 1$

$y = \frac{4x}{5} - 1$ $\quad$ خط راست

توجه: اگر $y = ax + b$ باشد مسیر حرکت خط راست می باشد

توجه: $y = ax^2 + bx + c$ باشد مسیر حرکت سهمی است

توجه: هرگاه $x^2 + y^2 = R^2$ باشد مسیر حرکت دایره است

توجه: هرگاه $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ باشد $a \neq b$ معادله مسیر بیضی است

* نکته: هرگاه معادله مسیر حرکت را بدهند و سرعت را بخواهند به صورت زیر عمل می کنیم:

$y = x^2 + 2x + 3$ $\quad x = 2$

از دو طرف نسبت به t مشتق می گیریم

$\frac{dy}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2 \times \frac{dx}{dt}$

$v_y = 2 \times 2 v_x + 2 v_x$

$\boxed{v_y = 5 v_x}$

v_x = سرعت روی محور x ها

v_y = سرعت روی محور y ها

v = سرعت کل

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

مثلا $v_x = 1$ $\quad v_y = 5$

$v = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

راه تشخیص نوع حرکت از روی معادله $x-t$

۱) ابتدا از معادله $x-t$ مشتق گرفته تا معادله $v-t$ بدست آید آن را مساوی صفر قرار داده و t_s را بدست می آوریم

۲) از $v-t$ مشتق گرفته آن را مساوی صفر قرار می دهیم و تعیین علامت می کنیم.

مثال: $x = t^2-4t+6$ نوع حرکت و جهت حرکت را در مدت 5s

مرحله (۱) $v = \frac{dx}{dt} = 2t-4=0 \Rightarrow t_s=2$

مرحله (۲) $a = \frac{dv}{dt} = 2$

خلاف جهت ↑ ۲ در جهت

v	−	+
a	+	+
$a \times v$	−	+
	کند	تند

مثال (۲) نوع حرکت و جهت حرکت را در مدت 5s

$v = t^2-4t+4$

مرحله (۱) $v=0 \Rightarrow (t-2)^2 \Rightarrow t=2$

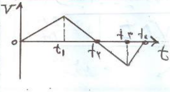
چون توان زوج است تغییر جهت نمی دهد.

مرحله (۲) $a=\frac{dv}{dt}=2t-4=0 \Rightarrow t_s=2$

در جهت ۲ در جهت ۵

v	+	+
a	−	+
$a \times v$	−	+
	کند	تند

نکات مربوط به نمودار سرعت - زمان:



۱) اگر نمودار بالای محور t باشد علامت V مثبت یعنی متحرک در جهت محور x ها دارد و اگر علامت V منفی باشد متحرک در خلاف جهت محور x ها دارد.

۲) هرجا نمودار صعودی رسم شود علامت شتاب همواره مثبت و هرگاه نزولی رسم شود علامت شتاب منفی است

۳) اگر نمودار به محور t نزدیک شود حرکت شتابدار کند شونده و از محور t دور شود حرکت تند شونده است

۴) هرگاه متحرک از حال سکون شروع به حرکت کند بیشترین فاصله متحرک از مبدأ هنگامی است که سرعت صفر و علامت سرعت عوض شود باشد لحظه t_2

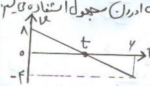
۵) مساحت زیر نمودار $v-t$ جابجایی است

$\Delta x = S$

۶) قدر مطلق مساحت زیر نمودار برابر با مسافت طی شده است.

$d = |S|$

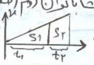
نکته (۱) گاهی از قضیه تالس و تشابه برای بدست آوردن مجهول استفاده می کنیم



$\frac{8}{4} = \frac{t}{6-t}$

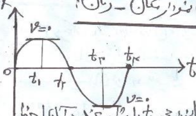
$t=4s$

نکته (۲): مساحت با توان (دوم) اضلاع متناسب است



$\frac{S_1}{S_1+S_2} = \left(\frac{t_1}{t_1+t_2}\right)^2$

بررسی نمودار مکان - زمان :



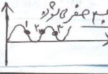
۱) هرجا نمودار محور t را قطع کند در آن لحظه متحرک از مبدأ می گذرد، مانند لحظه t_2 و t_4

۲) در نقاط max و min نمودار x-t سرعت صفر و متحرک تغییر جهت می دهد،

۳) مماس بر نمودار صعودی $V>0$ و مماس بر نمودار نزولی $V<0$ است

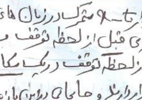
۴) هرگاه نمودار ∪ $(a>0)$ و ∩ $a<0$ است

۵) به تعداد نقاط عطف نمودار، شتاب و برایند نیروهای وارد بر جسم صفر می شود



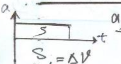
۳ بار شتاب صفر می شود

* **نکته مهم** : در نمودار x-t متحرک در زمان های مساوی قبل از لحظه توقف و بعد از لحظه توقف در یک مکان قرار دارد و جابجایی در این بازه زمانی صفر است،



لحظه $t=4$ ، لحظه توقف، در لحظه ۳ و ۵ در یک مکان قرار دارد و جابجایی بین دو لحظه ۳ و ۵ صفر است

نکات مربوط به نمودار شتاب - زمان

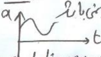


$S_{a-t} = \Delta V$

۱) مساحت زیر نمودار a-t برابر با تغییرات سرعت است

۲) توسط نمودار a-t به تنهایی نوع حرکت قابل تشخیص نیست مگر اینکه سرعت داده شود

۳) تا زمانی که علامت شتاب عوض نشود حرکت اشتباه تند یس کند نمی باشد



۴) هرگاه نمودار a-t به صورت خط راست غیر افقی باشد شتاب متوسط میانگین شتاب خواهد شد

$\bar{a} = \frac{10+0}{2} = 5$

حرکت یکنواخت مستقیم الخط

۱) اندازه سرعت ثابت، سرعت لحظه ای با سرعت متوسط برابر و شتاب صفر و تغییر جهت وجود ندارد

۲) مسافت با قدر مطلق جابجایی برابر است

$d = |\Delta x|$

۳) جابجایی در ثانیه های متوالی برابر است

$\Delta x_1 = \Delta x_3$

۴) معادله حرکت یکنواخت

مکان در لحظه t

$$\boxed{x = Vt + x_0}$$

سرعت متوسط یا لحظه ای

مکان اولیه

۵) رابطه جابجایی در حرکت یکنواخت

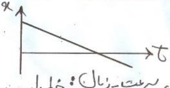
$$\boxed{\Delta x = V\Delta t} \quad V = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

جابجایی

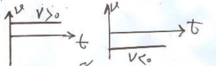
سرعت متوسط

۶) نمودارهای حرکت یکنواخت

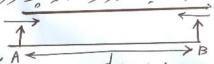
۱) نمودار مکان - زمان: خط راست غیرافقی



۲) نمودار سرعت - زمان: خط راست موازی محور t



شرط رسیدن دو متحرک به یکدیگر: (سرعت ثابت)



ابتدا معادله حرکت هر یک را نوشته، مساوی یکدیگر
می گذاریم

$x = vt + x_0 \Rightarrow x_A = v_A t$

$x = vt + x_0 \Rightarrow x_B = -v_B t + d$　$\Rightarrow x_A = x_B$

سرعت نسبی (v')

دو متحرک تماس فیزیکی ندارند

$v' = v_1 + v_2 \longrightarrow$ دو متحرک خلاف جهت

$v' = |v_1 - v_2| \longrightarrow$ دو متحرک در یک جهت بروند

محاسبه فاصله بین دو متحرک پس از t

$\Delta x' = v'\Delta t \longrightarrow$ مدت زمان
$\longrightarrow$ سرعت نسبی

$\Delta x'$ ↓ جابجایی انجام شده

محاسبه بیشترین فاصله بین دو متحرک در یک جهت

۱) بیشترین فاصله هنگامی است که متحرک تندرو به مقصد برسد
۲) ابتدا t متحرک تندرو را بدست آورده　$\Delta x = v_{تند} t$
۳) t را در رابطه $\Delta x_{max} = v\, t$ قرار داده ایم و Δx را بدست آورده
کندرو

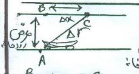
سرعت نسبی دو جسم که تماس فیزیکی دارند

مانند آب رودخانه و کشتی

$v' = v_1 + v_2$　در یک جهت بروند
$v = |v_1 - v_2|$　در خلاف جهت بروند

$\Delta x' = v'\Delta t \longrightarrow$ جابجایی انجام شده

زمان لازم برای عبور قایق سوار از عرض رودخانه



۱) $\Delta y = v t_{min}$
↓ عرض رودخانه　↘ سرعت قایق سوار

توجه: کمترین زمان وقتی است که قایق سوار عمود بر مسیر جریان آب حرکت کند

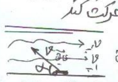
۲) وقتی قایق سوار عمود بر مسیر آب حرکت می کند از نقطه A به سمت ساحل نمی رسد یعنی نقطه B بلکه در نقطه C و جابجایی افقی به صورت زیر است

$\Delta x = V_{آب} \times t$

اگر سرعت آب ثابت نباشد میانگین سرعت آب را در نظر می گیریم

۳) جابجایی کل　$\Delta r = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2}$

۴) هرگاه قایق سوار منحرف نشود باید قایق تحت زاویه θ حرکت کند



$V_{قایق} \cos\theta = V_{آب}$

$V \sin\theta = V_y$
عمودی قایق

$\Delta y = V_y \Delta t$

روابط مربوط به حرکت شتابدار با شتاب ثابت

۱) معادله مکان - زمان

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$$

۲) رابطه سرعت - زمان

$$v=at+V_0$$

۳) رابطه مستقل از زمان

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x$$

۴) رابطه مستقل از شتاب

$$\Delta x=\frac{(v+v_0)}{2}\times\Delta t$$

۵) رابطه جابجایی

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t$$

روابط سرعت متوسط در حرکت شتاب ثابت

$$\bar{V}=\frac{\Delta x}{\Delta t},\quad \bar{V}=\frac{V+V_0}{2} \text{ و } \bar{V}=\frac{1}{2}at+V_0$$

جابجایی در ثانیه t ام (مثلاً ثانیه ۲)

$$\Delta x=\frac{1}{2}a(2t-1)+V_0$$

جابجایی در ثانیه اول $\Delta x=0.5a+V_0$

جابجایی در ثانیه دوم $\Delta x_2=1.5a+V_0$

جابجایی در ثانیه سوم: $\Delta x_3=2.5a+V_0$

توجه: تفاضل جابجایی متوالی برابر با a است

$$\Delta x_2-\Delta x_1=a$$

توجه ۲) تفاضل جابجایی غیر متوالی:

$$a=\frac{\Delta x_3-\Delta x_1}{t_3-t_1}$$

جابجایی در t ثانیه nام (مثلاً ۲ ثانیه سوم) $t=2,\ n=3$

$$\Delta x=(n-0.5)at^2+V_0t$$

جابجایی در t ثانیه اول

$$\Delta x_1=0.5at^2+V_0t$$

جابجایی در t ثانیه دوم:

$$\Delta x_2=1.5at^2+V.t$$

جابجایی در t ثانیه سوم

$$\Delta x_3=2.5at^2+V_0t$$

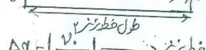
توجه: تفاضل جابجایی های متوالی:

$$\Delta x=at^2=\Delta x_2-\Delta x_1$$

توجه: تفاضل جابجایی های غیر متوالی:

$$at^2=\frac{\Delta x_3-\Delta x_1}{t_3-t_1}$$

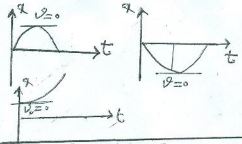
نکته: طول خط ترمز و جابجایی ترمز و زمان توقف



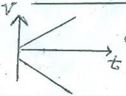
$\Delta x=\left|\frac{v_0}{2a}\right| \longrightarrow$ طول خط ترمز

$t=\left|\frac{v_0}{a}\right| \longrightarrow$ زمان توقف

نمودار x-t حرکت شتابدار با شتاب ثابت



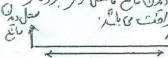
نمودار v-t حرکت با شتاب ثابت



خط راست غیر افقی

زمان عکس العمل یا واکنش راننده:

فاصله زمانی دیدن مانع تا محل ترمز بوده و حرکت یکنواخت می باشد.



$\Delta x = Vt$

بیشترین فاصله بین دو متحرک در طول مسیر حرکت

① معادله حرکت هر یک را نوشته و از هم کم می کنیم

② از معادله تفاضل مشتق گرفته و مساوی صفر گذاشته و t را بدست می آوریم.

③ t را در معادله تفاضل قرار داده و Δx را بدست می آوریم.

زمان رسیدن دو متحرک به یکدیگر: (دو متحرک به طرف یکدیگر می روند) ابتدا

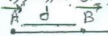
① اگر حرکت هر متحرک کند شونده باشد علامت شتاب را منفی می گذاریم.

$a' = a_1 + a_2$ ↓ شتاب نسبی

② $V_0' = V_{01} + V_{02}$

③ معادله نوشته $d = \frac{1}{2}a't^2 + V_0't$ و مقدار t را بدست می آوریم.

نکته: هرگاه دو متحرک از دو نقطه به فاصله d به دنبال یکدیگر (در یک جهت) بروند لحظه های به هم رسیدن به صورت زیر است.

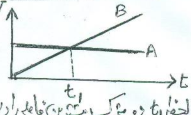


۱) متحرک A مثلا با سرعت ثابت حرکت می کند
$x_A = V_A t$

۲) متحرک B مثلا شتابدار است
$x_B = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + d$

۳) $\boxed{x_A = x_B}$

نکته: بررسی دو متحرک در یک نمودار



۱) در لحظه t_1 دو متحرک بیشترین فاصله را دارند

۲) در دو برابر لحظه t_1 دو متحرک به هم می رسند

رابطه جیزبکل در حرکت با شتاب ثابت

هرگاه متحرکی از حال سکون شروع به حرکت کند و در مدت t_1 به d_1 و در مدت t_2 به اندازه d_2 جابجا شود می توان نوشت

$$\frac{d_1}{d_1+d_2}=\left(\frac{t_1}{t_1+t_2}\right)^2$$

حرکت یکنواخت: اندازه و جهت و راستای سرعت ثابت است.

معادله حرکت یکنواخت

$$\underbrace{x}_{\text{مکان در هر لحظه}}=\overset{\text{سرعت}}{v}t+\underbrace{x_0}_{\text{مکان اولیه}}$$

حرکت سقوط آزاد:

حرکت سقوط آزاد:

۱) حرکت با شتاب ثابت است

۲) اندازه شتاب ثابت $a=g$ و جهت آن به طرف پایین است

۳) زمان رسیدن گلوله به زمین و سرعت برخورد گلوله به جرم گلوله، جنس گلوله، شکل گلوله بستگی ندارد.

روابط مربوط به حرکت سقوط آزاد:

۱) رابطه جابجایی - زمان

$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2+v_0t$$

فاصله گلوله از نقطه پرتاب

۲) رابطه سرعت - زمان

$$v=gt+v_0$$

۳) رابطه مستقل از زمان

$$v^2-v_0^2=2g\Delta y$$

۴) جابجایی در ثانیه tام:

$$\Delta y=\frac{1}{2}g(2t-1)+v_0$$

۵) جابجایی در t ثانیه nام

$$\Delta y=(n-0.5)gt^2+v_0t$$

۶) روابط سرعت متوسط

$$\bar{v}=\frac{\Delta y}{\Delta t},\quad \bar{v}=\frac{v+v_0}{2},\quad \bar{v}=\frac{1}{2}gt+v_0$$

توجه ۱: هرگاه گلوله سقوط آزاد کند در هر ثانیه ۱۰ $\frac{m}{s}$ به سرعت اضافه می شود مثلا اگر گلوله رها شود در ثانیه سوم، سرعت آن ۳۰ $\frac{m}{s}$ است.

توجه ۲: وقتی گلوله ای از یک بلندی رها شود جابجایی در ثانیه های متوالی به صورت زیر است. (تشکیل تصاعد حسابی با قدرنسبت ۱۰ را می دهد.

$v_0 = 0$

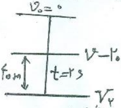
جابجایی در ثانیه اول	۵
جابجایی در ثانیه دوم	۱۵
جابجایی در ثانیه سوم	۲۵
جابجایی در ثانیه چهارم	۳۵

توجه: هرگاه گلوله‌ای از یک بلندی رها شود، جابجایی در ۰/۵ اول‌ها به صورت زیر است ۲/۵ در هر ثانیه اضافه می‌شود

$v_0 = 0$

۰/۵ اول	۱/۲۵
۰/۵ دوم	۳/۷۵
۰/۵ سوم	۶/۲۵

توجه مهم: هرگاه گلوله‌ای رها شود و جابجایی در t ثانیه آخر را بدهند مثلاً ۲ ثانیه آخر و ارتفاع بلندی یا سرعت برخورد با زمین را بخواهند می‌توان نوشت



$$\Delta y = \left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)\Delta t$$

$$40 = \frac{v + (v - 20)}{2} \times 2 = v = 30\,m/s$$

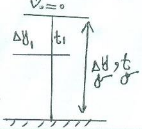
برخورد

$v_0 = 0$

اول	۵
دوم	۱۵
سوم	۲۵

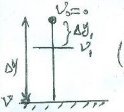
$$\Rightarrow \Delta y_{کل} = 5 + 15 + 25 = 45\,m$$

توجه مهم: هرگاه گلوله‌ای از یک بلندی رها شود و در مدت t_1، Δy_1 را طی کند کل بلندی را t طی کند Δy باشد می‌توان نوشت،



$$\frac{\Delta y_1}{\Delta y} = \left(\frac{t_1}{t}\right)^2$$

نکته: هرگاه گلوله‌ای از یک بلندی رها شود و پس از طی Δy_1، سرعت آن v_1 شود در لحظه برخورد با زمین و طی Δy سرعت آن v شود



$$\left(\frac{v_1}{v_{کل}}\right)^2 = \frac{\Delta y_1}{\Delta y_{کل}}$$

توجه: هرگاه دو گلوله از یک نقطه بدون سرعت اولیه با اختلاف زمانی t رها شوند فاصله‌ی دو گلوله تا لحظه رسیدن گلوله اول به زمین افزایش و از آن لحظه به بعد کاهش می‌یابد

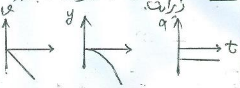
توجه: هرگاه گلوله از یک بلندی پرتاب شود جابجایی در ثانیه‌های tام به صورت زیر است

$v_0 = 0$

ثانیه اول	$5 + v_0$
ثانیه دوم	$15 + v_0$
ثانیه سوم	$25 + v_0$

نکته: هرگاه دو گلوله با اختلاف زمانی t رها شوند و t=1 باشد بیشترین فاصله بین دو متحرک می تواند اعداد ۵، ۱۵، ۲۵، ---- باشد.

توجه: هرگاه گلوله ای رها شود نمودارهای آن به صورت زیر است.



پرتاب قائم گلوله به طرف بالا

۱) هرگاه گلوله ای در راستای قائم به طرف بالا پرتاب شود تا رسیدن گلوله به نقطه اوج حرکت شتابدار کندشونده و پس از نقطه اوج تا زمین به صورت تندشونده است.

۲) هرگاه گلوله ای در راستای قائم به طرف بالا پرتاب شود در هر ثانیه $10 \frac{m}{s}$ از سرعت کم می شود تا به نقطه اوج برسد.

۳) هرگاه دو گلوله با سرعت برابر و با اختلاف زمانی t به طرف بالا پرتاب شوند فاصله بین دو گلوله تا نقطه اوج کاهش و از نقطه اوج تا رسیدن به نقطه پرتاب ابتدا افزایش و پس کاهش می یابد.

روابط مربوط به پرتاب گلوله در راستای قائم

۱) $\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t$

$\Delta y > 0$ ⇐ گلوله بالاتر از نقطه پرتاب قرار گیرد

$\Delta y = 0$ ⇐ گلوله به نقطه پرتاب برگردد

$\Delta y < 0$ گلوله زیر نقطه پرتاب برسد

۲) رابطه سرعت - زمان

$$V = -gt + V_0$$

۱) گلوله به طرف بالا رود ⟵ $V > 0$

۲) گلوله به طرف پایین برود ⟵ $V < 0$

۳) گلوله در نقطه اوج ⟵ $v = 0$

۳) رابطه مستقل از زمان

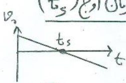
$v^2 - v_0^2 = -2g\Delta y$ به علامت Δy توجه شود

۴) سرعت در $\frac{m}{n}$ اوج

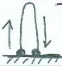
$$v = v_0\sqrt{1 - \frac{m}{n}}$$

۵) زمان اوج (t_s)

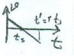
$t_s = \frac{V_0}{g}$



۶) زمان رفت و برگشت به نقطه پرتاب:



$t' = \frac{2V_0}{g}$



۷) ارتفاع اوج پرتابه: (h_{m})

فاصله نقطه پرتاب تا بالاترین نقطه که گلوله می‌رود.

$$h_s=\frac{v_0^2}{2g}$$

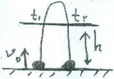
۸) زمان لازم در رسیدن گلوله به $\frac{m}{n}$ اوج

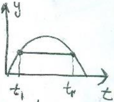
$$t'=\frac{v_0}{g}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{m}{n}}\right)$$

+ ⟵ پایین آمدن گلوله

− ⟵ بالا رفتن گلوله

نکته: هرگاه گلوله‌ای را از سطح زمین در راستای قائم به طرف بالا پرتاب کنیم در دو لحظه t_1 و t_2 در یک ارتفاع از نقطه پرتاب قرار می‌گیرند





$h=\frac{1}{2}gt_1t_2$ فاصله گلوله از نقطه پرتاب در دو لحظه t_1 و t_2

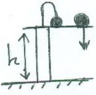
$v_0=\frac{1}{2}g(t_1+t_2)$ ⟵ سرعت اولیه

$v=\frac{1}{2}g(t_2-t_1)$ ⟵ سرعت در لحظه t_1 و t_2

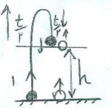
$t_{\text{کل}}=t_1+t_2$ ⟵ زمان رفت و برگشت

$t_s=\frac{t_1+t_2}{2}$ ⟵ زمان اوج

نکته: هرگاه از یک بلندی به ارتفاع h دو گلوله را با سرعت اولیه v_0 که یکی را به طرف بالا و همزمان دیگری را به طرف پایین پرتاب کنیم، گلوله‌ای که به طرف بالا پرتاب شده است $t'=\frac{2v_0}{g}$ دیرتر می‌رسد.



نکته: هرگاه گلوله‌ای را از سطح زمین با سرعت v_0 به طرف بالا پرتاب کنیم t ثانیه بعد گلوله دوم را با همان سرعت به طرف بالا پرتاب کنیم t ثانیه اضافی شامل زمان عبور از کمان است.



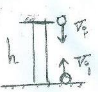
نکته: هرگاه از یک نقطه دو گلوله با سرعت V_1 و V_2 در یک جهت پرتاب شوند فاصله آنها بعد از زمان t به صورت زیر است.

$$\Delta y=|V_1-V_2|t$$

نکته: هرگاه دو گلوله از یک بلندی با سرعت V_1 و V_2 در خلاف جهت هم پرتاب شوند فاصله بین آنها پس از t

$$\Delta y=(V_1+V_{02})t$$

نکته: هرگاه از یک بلندی به ارتفاع h دو گلوله با سرعت V_{0_1} و V_{0_2} به طرف یکدیگر پرتاب شوند



۱) زمان به هم رسیدن

$$t_{برخورد} = \frac{h}{V_{0_1} + V_{0_2}}$$

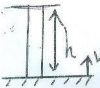
۲) فاصله گلوله ها در لحظه برخورد با سطح زمین

$$\Delta y_1 = -\frac{1}{2} g t^2 + V_{0_1} t_{برخورد}$$

۳) فاصله گلوله ها در لحظه برخورد از نقطه پرتاب گلوله ۲

$$\Delta y = +\frac{1}{2} g t^2 + V_{0_2} t$$

نکته هم: هرگاه دو گلوله از یک بلندی یکی رها و دیگری پرتاب شود و در لحظه عبور از کنار هم سرعت آنها برابر باشد ارتفاع اوج گلوله دوم که به طرف بالا می رود برابر با ارتفاع پرتاب گلوله اول است.



$$h_{max_{①}} = h$$

نکته: هرگاه یک بالون یا آسانسور در حال حرکت به طرف بالا باشد و گلوله ای در داخل آن رها شود سرعت اولیه گلوله برابر با سرعت بالون یا آسانسور بوده و در جهت حرکت آن است.

نکته: هرگاه درون یک سیستم متحرک گلوله ای رها شود می توان چنین نوشت

$$\Delta y = \frac{1}{2} a' t^2 + V_0' t \qquad V_0' = 0$$

$$\boxed{a' = a_1 \pm a_2}$$

+ ← خلاف جهت

− ← در جهت هم

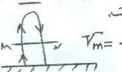
توجه: هرگاه آسانسور یا بالنی با سرعت V در حال حرکت به طرف بالا باشد و گلوله با سرعت V پرتاب شود می توان رابطه نسبی را به صورت زیر نوشت

$$\boxed{V_0 = V_1 \pm V_{0_2}}$$

+ ← در یک جهت

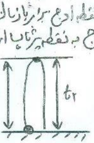
− ← در خلاف جهت

توجه: هرگاه گلوله ای در خلا پرتاب به طرف بالا شود در هر نقطه از مسیر سرعت رفت و برگشت برابر است.



$$V_m = -V_n$$

توجه: هرگاه گلوله در خلا پرتاب شود زمان رسیدن از نقطه پرتاب تا نقطه اوج برابر با زمان رسیدن از نقطه اوج به نقطه پرتاب است



$$t_1 = t_2$$

نکته: هرگاه گلوله را در هوا به طرف بالا پرتاب کنیم سرعت در نقطه رفت و برگشت

روابط مربوط به حرکت پرتابی تحت زاویه α

۱) رابطه سرعت اولیه:

$V_{0x} = V_0\cos\alpha$ روی محور xها

$V_{0y} = V_0\sin\alpha$ روی محور yها

$V_0 = \sqrt{V_{0x}^{۲} + V_{0y}^{۲}}$ بزرگی سرعت اولیه

۲) سرعت در لحظه t

$V_x = V_0\cos\alpha$ روی محور xها

$V_y = -gt + V_{0y}$ روی محور yها

$V = \sqrt{V_x^{۲} + V_y^{۲}}$ بزرگی سرعت در لحظه t

۳) معادلات مکان - زمان

$\Delta x = V_x t = V_0\cos\alpha t$ روی محور xها

$\Delta y = -\frac{۱}{۲}gt^{۲} + V_{0y}t$ روی محور yها

۴) معادله مسیر حرکت

$$\Delta y = \frac{-gx^{۲}}{۲V_0^{۲}\cos^{۲}\alpha} + x\tan\alpha$$

۵) زمان اوج پرتابه (t_s)

$$t_s = \frac{V_{0y}}{g} = \frac{V_0\sin\alpha}{g}$$

۶) زمان برگشت گلوله به نقطه پرتاب t'

$$t' = \frac{۲V_{0y}}{g} = \frac{۲V_0\sin\alpha}{g}$$

توجه: زمان برگشت به نقطه پرتاب دو برابر زمان اوج است

ارتفاع اوج پرتابه (h_s)

$$h_s = \frac{V_{0y}^{۲}}{۲g} = \frac{V_0^{۲}\sin^{۲}\alpha}{۲g}$$

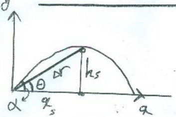
توجه مهم: هرگاه معادله مسیر را بدهند و ارتفاع اوج را بخواهند معادله مسیر را مساوی صفر قرار داده مقدار x را بدست آورده و آن را در معادله مسیر قرار دهید در این حالت ارتفاع اوج بدست می آید.

$y = -۲x^{۲} + ۲۰x$

$y' = -۴x + ۲۰ = ۰ \Longrightarrow x = ۵\,m$

$y = -۲(۵)^{۲} + ۲۰\times۵ = ۵۰\,m$

جابجایی از نقطه پرتاب تا نقطه اوج



$\Delta r = \sqrt{h_s^{۲} + x_s^{۲}}$

$x_{s\,\text{اوج}} = \frac{V_0^{۲}\sin ۲\alpha}{۲g}$

$\frac{x_{\text{اوج}}}{h_{\text{اوج}}} = ۲\cot\alpha$, $\tan\theta = \frac{۱}{۲}\tan\alpha$

ویژگی نقطه اوج:

۱) سرعت به کمترین مقدار ممکن می رسد.

$V_{min} = V_s = V_0\cos\alpha$

۲) مؤلفه افقی سرعت بر بردار شتاب عمود است

با یکدیگر برابر نمی باشند

$V_m > V_n$

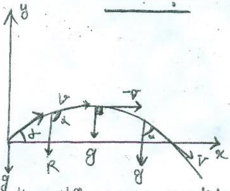
$t_{oM} < t_{No}$

نکته ۱۴: هرگاه گلوله A را با V_{01} به طرف بالا و گلوله B را با [illegible] به طرف بالا پرتاب شود (V_{02} ، V_{01}) بیشترین فاصله بین آنها به صورت زیر است

$$\Delta y_{max} = |V_{02} - V_{01}| t \, , \, t = \frac{2V_{01}}{g}$$

حرکت پرتابی تحت زاویه α (مخصوص رشته ریاضی)

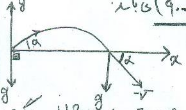
۱) حرکت شتابدار بوده و اندازه و جهت بردار شتاب ثابت است.



۲) زاویه بین بردار سرعت و شتاب در حال کاهش است قبل از اوج بیش از ۹۰ درجه در اوج ۹۰ درجه و بعد از اوج کمتر از ۹۰ است

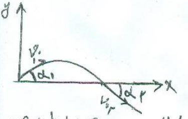
۳) تا رسیدن گلوله به نقطه اوج حرکت گلوله کند شونده و از نقطه اوج به نقطه پرتاب حرکت تند شونده است.

۴) زاویه بین بردار سرعت و شتاب در لحظه پرتاب $(90+\alpha)$ و در نقطه برگشت به نقطه پرتاب $(90-\alpha)$ می باشد.



۵) حرکت پرتابی تحت زاویه α شامل دو حرکت بوده است که روی محور xها حرکت یکنواخت و روی محور yها حرکت شتابدار است.

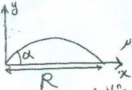
۶) زاویه ای که گلوله در لحظه پرتاب با سطح افق می سازد (α_1) برابر با زاویه ای است که گلوله در نقطه بازگشت با سطح افق می سازد (α_2)



۷) سرعت در لحظه پرتاب (V_{01}) برابر با سرعت در نقطه برگشت است (V_{02})

$$V_{01} = -V_{02}$$

برد پرتابه (R)



حداکثر جابجایی افقی که گلوله طی می‌کند تا به همان ارتفاع از نقطه پرتاب برسد.

$$R=\frac{V_0^۲\sin ۲\alpha}{g}=\frac{۲V_{0x}V_{0y}}{g}$$

نکات مربوط به برد پرتابه

۱) به ازای $\alpha=۴۵°$ برد پرتابه بیشینه است

$$R_{max}=\frac{V_0^۲}{g}$$

۲) به ازای زاویه‌های متمم ($\alpha_1+\alpha_2=۹۰$) برد پرتابه برابر است

۳) تغییرات برد: $۰\xrightarrow{\text{افزایش}}\underset{\text{بیشینه}}{۴۵}\xrightarrow{\text{کاهش}}۹۰$

۴) نسبت برد به ارتفاع

$$\frac{R}{h}=۴\cot\alpha \quad و \quad \frac{h}{R}=\frac{۱}{۴}\tan\alpha$$

۵) هرگاه یک گلوله را با سرعت V در راستای قائم رو به بالا پرتاب کنیم به اندازه y بالا می‌رود و هرگاه این گلوله را با همان سرعت تحت زاویه $۴۵°$ پرتاب کنیم و به اندازه x جابجا شود می‌توان گفت $x=۲y$

۶) هرگاه معادله مسیر داده شود و برد پرتابه را بخواهند آن را مساوی صفر گذاشته و مقدار x را بدست می‌آوریم که همان برد پرتابه است

$y=۲x^۲-۴۰x$

$۲x^۲-۴۰x=۰\Rightarrow x(۲x-۴۰)=۰$

$x=۰$ و $x=۲۰m$ (برد پرتاب)

توجه ۲: بیشینه سرعت پرتابه در لحظه پرتاب V_0 و کمترین سرعت در نقطه اوج $V_0\cos\alpha$ است

$$\frac{K_{min}}{K_{max}}=\frac{\cancel{\frac{۱}{۲}mV_0^۲}\cos^۲\alpha}{\cancel{\frac{۱}{۲}mV_0^۲}}=\cos^۲\alpha$$

تغییرات سرعت در حرکت پرتابی:

در حرکت پرتابی روی محور xها با سرعت ثابت پرتابه می‌رود پس تغییر سرعت ندارد و تغییر سرعت روی محور yها می‌باشد:

$$\boxed{\Delta V=g\Delta t}$$

توجه ۳: هرگاه گلوله‌ای را از سطح زمین با سرعت V_0 تحت زاویه α پرتاب کنیم و به نقطه پرتاب برگردد سرعت متوسط به صورت زیر است

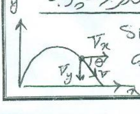
$$\bar V=\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec i+\cancelto{۰}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}\vec j$$

$$\bar V=V_x=V_0\cos\alpha$$

انرژی پتانسیل در نقطه اوج

$$U=mgh\xrightarrow{h=\frac{V_0^۲\sin^۲\alpha}{۲g}}\frac{۱}{۲}mV_0^۲\sin^۲\alpha$$

کاربرد نسبت مثلثاتی در حرکت پرتابی

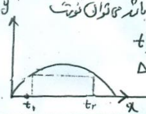


$$\sin\theta=\frac{V_y}{V}$$

$$\cos\theta=\frac{V_x}{V}$$

$$\tan\theta=\frac{V_y}{V_x}$$

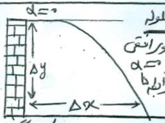
توجه: هرگاه گلوله‌ای را تحت زاویه α پرتاب کنیم و در دو لحظه t_1 و t_2 در یک ارتفاع از نقطه پرتاب باشد می‌توان نوشت



$$t_s=\frac{t_1+t_2}{2}$$

$$\Delta x=v_x(t_2-t_1)$$

پرتاب افقی گلوله



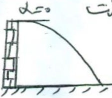
هرگاه گلوله به طور افقی پرتاب شود α=۰ بوده در کلیه رابطه‌ها مقدار sinα و tanα را صفر و cosα را یک می‌گذاریم

$v_x=v_0$ و $V_x=V_0$ و $\Delta x=V_0t$

$V_{0y}=0$ و $V_y=gt$ و $\Delta y=\frac{1}{2}gt^2$

$$V_y^2-\cancel{V_{0y}^2}=2g\Delta y$$

توجه: هرگاه گلوله به طور افقی پرتاب شود زمان رسیدن پرتابه به زمین به سرعت اولیه بستگی ندارد و می‌توان نوشت



$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2+\cancel{V_{0y}t}$$

$$\Downarrow$$

$$t=\sqrt{\frac{2\Delta y}{g}}$$

مثلاً اگر گلوله‌ای از ارتفاع 45m با سرعت $20\frac{m}{s}$ به طور افقی پرتاب شود پس از 3s به زمین می‌رسد

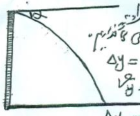
ثانیه اول		۵m
ثانیه دوم		۱۵
ثانیه سوم		۲۵

$$\Longrightarrow \boxed{t=3s}$$

ولی در مقدار جابجایی افقی مقدار V_0 تاثیرگذار است

$$\underset{\text{افقی}}{\Delta x}=V_0t$$

پرتاب گلوله زیر نقطه پرتاب



در کلیه روابط جهت پرتاب را منفی می‌گذاریم.

$$\Delta y=-\frac{1}{2}gt^2-V_{0y}t$$

$$V_y=-gt-V_{0y}$$

$$\Delta y=\frac{-gx^2}{2V_0^2\cos^2\alpha}-x\tan\alpha$$

نکته: هرگاه گلوله از یک بلندی به ارتفاع h با سرعت V_0 تحت زاویه α پرتاب کنیم زمان رسیدن به زمین عبارت است از

$$\boxed{t=\frac{V_0\sin\alpha+\sqrt{(V_0\sin\alpha)^2+2gh}}{g}}$$